

Lista nº 1 – Distribuições de Probabilidades Conjuntas

1. (Montgomery – Exercício 5.13, pág. 99). Quatro fornos elétricos, que foram derrubados durante o transporte, são inspecionados e classificados como contendo grandes, pequenos ou nenhum defeito. No passado, 60% dos fornos derrubados tinham grandes defeitos, 30% tinham médios defeitos e 10% não tinham defeitos. Considere que os defeitos dos quatro fornos ocorrem independentemente.
 - a. A distribuição de probabilidade da contagem de fornos em cada categoria é multinomial? Por que sim ou por que não?
 - b. Qual é a probabilidade de, dos quatro fornos derrubados, dois terem grandes defeitos e dois terem pequenos defeitos?
R.: 0,1944.
 - c. Qual a probabilidade de o forno não ter defeitos?
*R.: 0,0001.*Determine o seguinte:
 - d. A função de probabilidade conjunta do número de fornos com um defeito grande e o número de fornos com um defeito pequeno.
 - e. O número esperado de fornos com grandes defeitos.
R.: 2,4.
 - f. O número esperado de fornos com pequenos defeitos.
R.: 1,2.
 - g. A probabilidade condicional de dois fornos terem grandes defeitos, dado que dois fornos têm pequenos defeitos.
R.: 0,7347.
 - h. A probabilidade condicional de três fornos terem grandes defeitos, dado que dois fornos têm pequenos defeitos.
R.: 0.
 - i. A distribuição de probabilidades condicionais do número de fornos com grandes defeitos, dado que dois fornos têm pequenos defeitos.
R.: $f_{X|2}(0)=0,0204$; $f_{X|2}(1)=0,2449$; $f_{X|2}(2)=0,7347$.
 - j. A média condicional do número de fornos com grandes defeitos, dado que dois fornos têm pequenos defeitos.
R.: 1,7143.
2. (Montgomery – Exercício 5.19, pág. 106). Determine o valor de c que torna a função $f(x, y) = cxy$ uma função de densidade de probabilidade conjunta ao longo da faixa $0 < x < 3$ e $0 < y < x$. Determine o seguinte:
 - a. $P\{X < 1; Y < 2\}$.
R.: 1/81.
 - b. $P\{1 < X < 2\}$.
R.: 5/27.
 - c. $P\{Y > 1\}$.
R.: 0,790.
 - d. $P\{X < 2; Y < 2\}$.
R.: 16/81.
 - e. $E(X)$
R.: 12/5.
 - f. $E(Y)$
R.: 8/5.

- g. Distribuição de probabilidades marginais de X .
 $R.: f(x) = 4x^3/81; 0 < x < 3.$
- h. Distribuição de probabilidades marginais de Y , dado que $X = 1$.
 $R.: f_{Y|X=1}(x) = 2y; 0 < y < 1.$
- i. $E[Y | X = 1]$.
 $R.: 1.$
- j. $P\{Y > 2 | X = 1\}$.
 $R.: 0.$
3. (Montgomery – Exercício 5.41, pág. 110) Determine a covariância e a correlação para a função densidade de probabilidade conjunta, $f_{XY}(x, y) = e^{-x-y}$ para a faixa de $0 < x$ e $0 < y$.
 $R.: \sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0.$
4. (Montgomery – Exercício 5.45, pág. 110) Suponha que a correlação entre X e Y seja ρ . Para as constantes $a, b, c,$ e d , qual é a correlação entre as variáveis aleatórias $U = aX + b$ e $V = cY + d$?
 $R.: \text{sinal}(ac)\rho_{XY}.$
5. Na fabricação de lâmpadas de eletroluminescência, várias camadas diferentes de tinta são depositadas em um substrato plástico. A espessura dessas camadas é crítica e especificações relativas à cor final e à intensidade de luz devem ser obedecidas. Sabe-se que X é normalmente distribuída, com uma média de 0,1 mm e um desvio-padrão de 0,00031 mm e Y é normalmente distribuída, com uma média de 0,23 mm e um desvio-padrão de 0,00017 mm. O valor de ρ para essas variáveis é igual a zero.
- a. (Montgomery – Exercício 5.49, pág. 112) As especificações exigem que uma lâmpada tenha uma espessura de tinta correspondendo a X na faixa de 0,099535 a 0,100465 mm e Y na faixa de 0,22966 a 0,23034 mm. Qual é a probabilidade de uma lâmpada selecionada aleatoriamente atender às especificações?
 $R.: 0,8270.$
- b. (Montgomery – Exercício 5.59, pág. 114) Se uma determinada lâmpada for composta somente por essas duas tintas, qual será a probabilidade da espessura total da tinta ser menor que 0,2337 mm?
 $R.: 0.$
- c. Uma lâmpada com uma espessura total excedendo 0,2405 mm não tem uma uniformidade de cor requerida pelo consumidor. Encontre a probabilidade de uma lâmpada selecionada aleatoriamente não satisfazer as especificações do consumidor.
 $R.: 1.$
6. (Montgomery – Exercício 5.87, pág. 117) O tempo para um sistema automatizado em um depósito localizar uma peça é distribuído normalmente, com uma média de 45 segundos e um desvio-padrão de 30 segundos. Suponha que sejam efetuados pedidos independentes para 10 peças.
- a. Qual é a probabilidade de que o tempo médio para localizar 10 peças exceda 60 segundos?
 $R.: 0,057.$
- b. Qual é a probabilidade de que o tempo total para localizar 10 peças exceda 600 segundos?

R.: 0,057.

7. Suponha que um casal seja selecionado ao acaso em uma população e que a distribuição conjunta da altura de cada cônjuge seja uma distribuição normal bivariada. Suponha que as alturas das esposas tenha uma média de 66,8 polegadas e um desvio-padrão de 2 polegadas e a altura dos maridos tenha uma média de 70 polegadas e um desvio-padrão de 2 polegadas. A correlação entre as alturas das esposas e maridos é 0,68.
- Determine a probabilidade de que a mulher seja mais alta que o marido.
R.: 0,0227.
 - Encontre o quantil 0,95 da distribuição condicional da altura da mulher, dado que a altura do marido seja 72 polegadas.
R.: 70,57.