

### Lista nº 3 – Funções de Variáveis Aleatórias

1. Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma população exponencial com parâmetro. Defina a média amostral:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Determine a função de densidade de probabilidade de  $\bar{X}$ .

2. Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal padrão. Defina:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- a. Prove que  $S_n$  tem distribuição normal com média 0 e variância  $n$ .
- b. Determine a função de densidade de probabilidade de  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ .
3. Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal padrão. Defina:

$$S_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

- a. Prove que  $S_n$  tem distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade.
- b. Determine a função de densidade de probabilidade de  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ .
4. Determine a esperança de uma distribuição exponencial dupla com parâmetro  $\lambda$ .
5. (Ex.: 6.7, pág. 135). Suponha que as dimensões  $X$  e  $Y$  de uma chapa retangular de metal possam ser consideradas variáveis aleatórias contínuas independentes, com as seguintes funções de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x - 1 & , \text{ para } 1 < x \leq 2; \\ -x + 3 & , \text{ para } 2 < x < 3; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{ para } 2 < y < 4; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

- a. Determine a função de densidade de probabilidade da área da chapa  $A = XY$ .
6. (Ex.: 6.11, pág 135). A força magnetizante  $H$  no ponto  $P$ , distante  $X$  unidades de um condutor que conduza uma corrente  $I$  é dada por  $H = 2\frac{I}{X}$ . Suponha que  $P$  seja um ponto móvel, isto é, seja uma variável aleatória contínua uniformemente distribuída sobre o intervalo  $(3, 5)$ . Suponha que a corrente  $I$  seja também uma

variável aleatória contínua, uniformemente distribuída sobre o intervalo (10, 20). Suponha ademais que as variáveis aleatórias  $X$  e  $I$  sejam independentes.

- a. Estabeleça a função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $H$ .

7. Sejam as variáveis aleatórias independentes  $Z$  e  $X$ ,  $Z$  com distribuição normal padrão e  $X$  com distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade. Defina a variável aleatória  $T_n$  dada pela expressão abaixo:

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$$

- a. Determine a função de densidade de probabilidade de  $T_n$ , usando o método do Jacobiano
  - b. Identifique a distribuição de probabilidade de  $T_n$ .
8. Sejam as variáveis aleatórias independentes  $X$  e  $Y$ .  $X$  tem distribuição qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade e  $Y$ , distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade. Defina a variável aleatória  $F$  dada pela expressão abaixo:

$$F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$$

- a. Determine a função de densidade de probabilidade de  $F$ , usando o método do Jacobiano
  - b. Identifique a distribuição de probabilidade de  $F$ .
9. Seja a quantidade aleatória  $T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$ , com  $Z$  e  $X$ , em que  $Z$  tem distribuição normal padrão e  $X$ , distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade. Considere a variável aleatória  $T_n^2$  ou seja:

$$T_n = \frac{Z^2}{\frac{X}{n}}$$

- a. Determine a função de densidade de probabilidade de  $T_n^2$ .
  - b. Identifique a distribuição encontrada.
10. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes.  $X$  têm distribuição gama com parâmetros  $m$  e  $\lambda$  e  $Y$ , distribuição gama com parâmetros  $n$  e  $\lambda$ . Seja a variável aleatória  $W$  definida por:

$$W = \frac{X}{X + Y}$$

- a. Prove que  $W$  tem distribuição beta com parâmetros  $m$  e  $n$ .
11. Suponha  $U_1$  e  $U_2$  variáveis aleatórias independentes e identicamente e uniformemente distribuídas no intervalo (0, 1).

- a. Determine a função de densidade de probabilidade de  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $R^2$  e  $\theta$ , definidas como:

$$Z_1 = R \cos(\theta)$$

$$Z_2 = R \sin(\theta)$$

$$R^2 = -2 \ln(U_1)$$

$$\theta = 2\pi U_2.$$

- b.  $Z_0$  e  $Z_1$  são independentes?
- c. Qual a distribuição de  $R^2$ ?

- d. Qual a distribuição de  $\theta$ ?
- e.  $R^2$  e  $\theta$  são independentes?

Fonte: MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.