

Gráfico de Controle por Variáveis

Roteiro

1. Construção de Gráficos de Controle de \bar{X} e R
2. Análise de Desempenho dos Gráficos \bar{X} e R
3. Alternativas para Monitoramento da Dispersão
4. Regras Suplementares de Decisão para Gráficos \bar{X}
5. Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras
6. Referências

Principais Gráficos de Variáveis

- Gráfico de Média (\bar{X})
- Gráfico de Amplitude (R)
- Gráfico de Variância (S^2)
- Gráfico de Desvio-Padrão (S)

Construção dos Gráficos de Controle \bar{X} e R

Variáveis Contínuas

- Para monitoramento de característica de qualidade contínua são usuais:
 - √ Gráfico de Média \bar{X} :
 - monitorar centralidade do processo
 - ajuste do processo
 - √ Gráfico de Amplitude R:
 - monitorar dispersão do processo
 - estabilidade do processo

Critérios para Monitoramento

- “Se o processo estiver em controle, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar a variabilidade” (Shewhart);
- Processo sob controle:
 - √ Deseja-se que raramente caia um ponto na região de ação do gráfico
 - depende da abertura do gráfico
 - √ Busca-se não intervir equivocadamente em um processo sob controle
 - Em geral, intervenções desnecessárias geram custos

Gráfico de \bar{X}

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}$$

- Parâmetros da Média Amostral:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu_0$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

✓ μ_0 : média do processo sob controle

✓ σ_0 : desvio-padrão do processo sob controle

- μ_0 e σ_0 não conhecidos com precisão absoluta
- Limites de controle estimados:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

Escolha da Abertura do Gráfico

- Processo sob controle (estável e ajustado)
 - ✓ Intervalo $\pm 3\sigma_0/\sqrt{n}$ engloba 99,73% dos valores de \bar{X}
- Caso algum valor de X caia fora desse intervalo
 - ✓ É mais verossímil que a alteração da média do processo (μ) seja devido a alguma causa especial

Amplitude Amostral

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}$$

- Distribuição amostral da amplitude

√ Hipótese:

- população normal com média μ e desvio-padrão σ

√ $E(R) = \mu_R = d_2\sigma$

√ $DP(R) = \sigma_R = d_3\sigma$

Amplitude Relativa

$$W = \frac{R}{\sigma}$$

- Distribuição amostral da amplitude

√ Hipótese:

- população normal com média μ e desvio-padrão σ

√ $E(W) = \mu_W = d_2$

√ $\text{Var}(W) = \sigma_W^2 = d_3^2$

√ Parâmetros dependem apenas do tamanho amostral

√ Distribuição acumulada de W:

- Tabela B

Valores de d_2 e d_3

n	d_2	d_3
2	1,128	0,853
3	1,693	0,888
4	2,059	0,880
5	2,326	0,864
6	2,534	0,848
7	2,704	0,833
8	2,847	0,820
9	2,970	0,808
10	3,078	0,797
11	3,173	0,787
12	3,258	0,778
13	3,336	0,770
14	3,407	0,763
15	3,472	0,756

Gráfico de R

- Limites de Controle (exatos):

$$LSC_R = d_2\sigma_0 + 3d_3\sigma_0 = (d_2 + 3d_3)\sigma_0$$

$$LM_R = d_2\sigma_0$$

$$LIC_R = d_2\sigma_0 - 3d_3\sigma_0 = (d_2 - 3d_3)\sigma_0$$

- Se $LIC_R < 0$

√ Adota-se $LIC_R = 0$

- Quando R for maior que LSCR

√ Alarme de aumento do desvio-padrão do processo

Uso dos Gráficos de Controle

- Fases no uso de um gráfico de controle:

√ Fase 1: Uso dos gráficos para estabelecimento do controle

- testar se o processo estava ou não sob controle quando os m subgrupos preliminares forem extraídos e as estatísticas amostrais calculadas

- obtenção de conjunto de observações sob controle, de maneira a estabelecer os limites de controle da fase 2

√ Fase 2: Monitoramento da produção futura

Limites Tentativos (1)

- Limites de controle obtidos quando são usadas amostras preliminares

√ Permitem determinar se o processo estava sob controle durante seleção de m amostras iniciais

- Para testar hipótese de controle do processo no passado:

√ Plotar valores de \bar{X} e R

Limites Tentativos (2)

- √ Se todos os pontos caem dentro limites de controle e não se observa comportamento sistemático;
 - Processo está sob controle e limites de controle tentativos são apropriados
- √ Se um ou mais pontos caem na zona de ação do gráfico
 - Procuram-se causas especiais relacionadas com cada ponto na zona de ação dos gráficos
 - Identificada a causa especial, o ponto é descartado e os limites são recalculados
 - Prossegue-se com o procedimento até que todos os pontos caiam dentro dos limites de controle

Limites Tentativos (3)

- √ Se causa especial não é identificada
 - Descarta-se o ponto se houver indícios de que o ponto veio de distribuição característica de processo fora de controle
 - Retém-se os pontos, considerando-se apropriados os limites tentativos
(Se os pontos representam situação fora de controle, os limites resultantes serão folgados)
- √ Em geral, um ou dois pontos fora de controle não distorcem significativamente os limites de controle
- √ Se amostram futuras futuras ainda indicarem o controle do processo, então os pontos inexplicáveis podem ser seguramente descartados

Limites Tentativos (4)

- √ Caso ocorram vários pontos na zona de ação dos gráficos
 - Descarte de todos os pontos pode prejudicar o estabelecimento dos limites de controle
(Abordagem ignorará informação relevante contida nos dados)
 - É improvável o sucesso na procura da causa atribuível para cada um dos pontos fora de controle
 - Em geral é melhor se concentrar no *padrão* formado por esses pontos
(Causa atribuível associada ao padrão dos pontos foras de controle é identificada mais facilmente)

Estimativas Iniciais do Processo

- Estimadores dos parâmetros do processo (conjunto inicial de m amostras)
 - √ Média do processo $\hat{\mu}_0 = \bar{X}$ Sensível a desajustes devido causas especiais
 - √ Estimador desvio-padrão do processo $\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$ Insensível a desajustes devido causas especiais
- Gráfico de R
 - √ Pode ser construído com o processo desajustado
 - √ Em geral, a construção dos gráficos de controle é iniciada pelo Gráfico de R

- Exemplo
 - √ Característica de qualidade: Volume de Sacos de leite:
 - √ Conjunto de dados para estimação inicial:
 - 25 subgrupos racionais de tamanho 5 ($m = 25$ e $n = 5$)
 - Banco de dados: *BD_CQL.xls/guia: leite*
 - √ Tabela 3.2 (Branco Costa et. al)

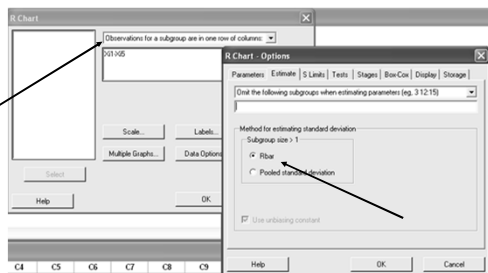
X1	X2	X3	X4	X5	R
1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	10,3
1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	16,6
999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	12,9

- √ Estimação variabilidade do processo sob controle:

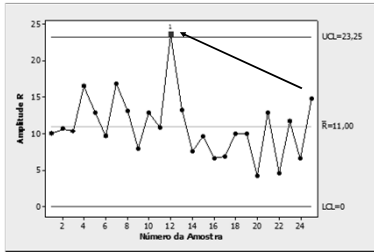
$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,996}{2,326} = 4,729$$

- Construção Gráfico de R das 25 observações

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R



- Gráfico de R:



- Estimativas

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,727 = 23,25$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 11,00$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,26$$

$$LIC_R = 0$$

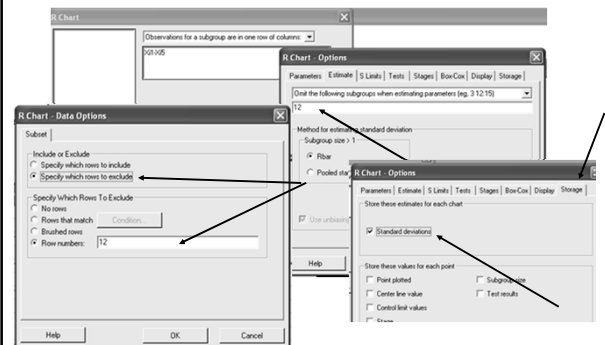
1ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo
 $\hat{\sigma}_0 = 4,727$
- Amplitude da 12ª amostra é grande
 - √ Necessária investigação para encontrar justificativa para aumento da variabilidade do processo
- Se for possível diagnosticar causa especial que afetou variabilidade
 - √ Elimina-se amostra e estima-se novamente σ_0 .
 - (Se causa especial influenciou apenas essa amostra)

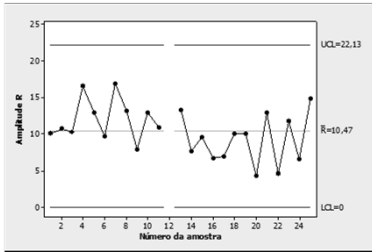
- Volume de sacos de Leite – Eliminação R₁₂

$$\sqrt{m = 24 \text{ e } n = 5}$$

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R



- Gráfico de R:



- Estimativas

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,467}{2,326} = 4,500$$

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,500 = 22,13$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 10,467$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,20$$

$$LIC_R = 0$$

2ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo
 $\hat{\sigma}_0 = 4,500$
- A amplitude dos 24 subgrupos distribuem-se de forma aleatória em torno da média
 $\sqrt{\bar{R}/d_2}$ é estimativa confiável do desvio-padrão do processo
 \checkmark Processo aparenta estar sob controle durante Fase 1

Construção do Gráfico de \bar{X}

- É afetado por causas especiais que afetam:
 - \checkmark média do processo, ou
 - \checkmark dispersão do processo
- Só pode ser construído com o processo ajustado e estável
 - \checkmark isento de todo tipo de causas especiais
 - \checkmark Nesse caso, preocupação será apenas com estimativa da média do processo

Gráfico de \bar{X}

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

- Estimativa dos Parâmetros do Processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$$

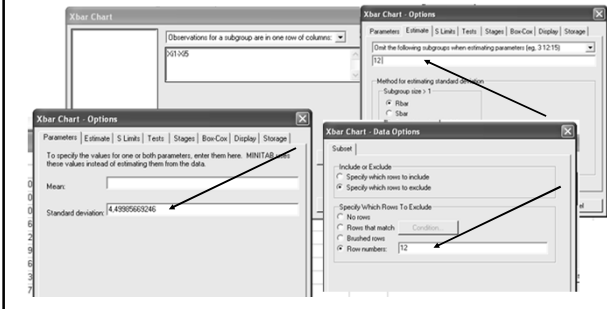
$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de \bar{X}

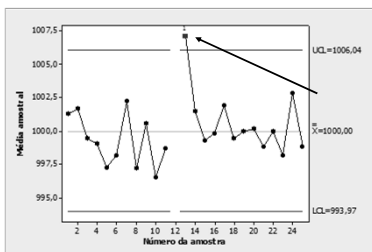
$$\sqrt{m = 24; n = 5}$$

$$\sqrt{\text{Estimativas Parâmetros: } \bar{\bar{X}} = 1000,0; \hat{\sigma}_0 = 4,500}$$

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X



- Gráfico de \bar{X} :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 106,04$$

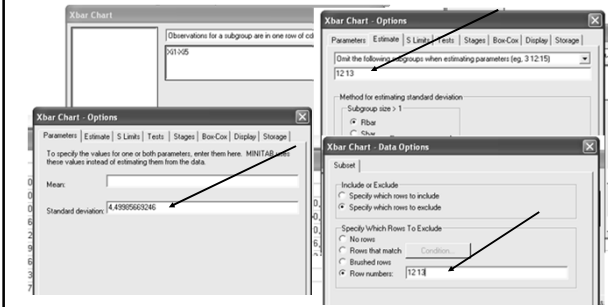
$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 1000,0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,97$$

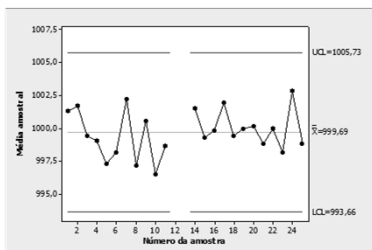
Comentários

- O ponto $\bar{X}_{13} > LSC_{\bar{X}}$
- Comentários similares àqueles efetuados para R_{12}
 \checkmark Elimina-se \bar{X}_{13}

- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de \bar{X}
 $\checkmark m = 23; n = 5$
 \checkmark Estimativas Parâmetros: $\bar{\bar{X}} = 999,7; \hat{\sigma}_0 = 4,500$
Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X



- Gráfico de \bar{X} :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 1005,73$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 999,69$$

$$LIC_R = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 999,69 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,66$$

• **Comentários:**

- √ As médias dos 23 subgrupos distribuem-se aleatoriamente em torno da média e nenhuma excede os limites de controle
- √ Considera-se o processo ajustado e estável

**Estimativa dos Parâmetros –
Recomendações**

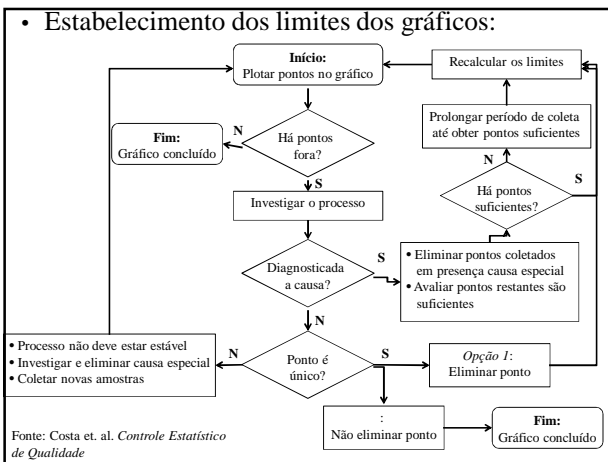
- Se identificada a causa especial e seu período de atuação, todas as amostras afetadas devem ser eliminadas
 - √ Mesmo que nem todas estejam na zona de ação
- Se houver poucas amostras restantes após descarte das afetadas
 - √ Prolongar o período de coleta das amostras destinadas à construção dos limites de controle

- Nem sempre é possível a causa especial que atuou no passado
 - √ É ainda mais difícil saber quais as amostras afetadas
- **Importante:**
 - √ Mesmo com o processo sob controle, há uma maior chance de um ou mais pontos caírem na zona de ação do gráfico, quando houver muitas amostras disponíveis
(maior que 25 ou 30 subgrupos)

• **Recomendação:**

√ Se em uma sequência de 25 ou 30 pontos apenas um estiver fora dos limites de controle e não for possível diagnosticar nenhuma causa especial, o melhor é mantê-lo, construindo o gráfico de controle com base em todas as amostras

• **Estabelecimento dos limites dos gráficos:**



Fase 2 – Monitoramento do Processo

• **Estimação dos parâmetros (fase 1)**

√ só deve ser encerrada quando o processo encontrar-se estável e ajustado

• **Monitoramento do processo (fase 2)**

√ Os limites de controle não devem mais ser alterados, a não ser que o processo produtivo sofra alterações permanentes

√ Decisão para detecção e eliminação de causa especial
 – Basta um valor de \bar{X} ou de R estar na zona de ação para que decida-se pela intervenção no processo

Análise de Desempenho dos Gráficos \bar{X} e R

Desempenho dos Gráficos de Controle

- Capacidade de detectar perturbações no processo
- É importante para planejamento do gráfico:
 - √ Determinação do plano de amostragem
 - tamanho amostra; intervalo entre amostras
 - √ Estabelecimento dos Limites de Controle
 - abertura do gráfico

Teste de Hipóteses

		Decisão		
		Não Rejeitar H_0		Rejeitar H_0
V	Decisão Correta	$1 - \alpha$	Erro Tipo I	α
F	Erro Tipo II	β	Decisão Correta	$1 - \beta$

Teste de Hipóteses do Gráfico de \bar{X}

- $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_1: \mu \neq \mu_0$
- H_0 :
 - ✓ Processo em controle
 - ✓ Processo ajustado
 - ✓ Processo centrado no valor-alvo
 - ✓ Processo livre de causas especiais
- Não se rejeita H_0 toda vez em que \bar{X} cai fora da zona de ação do gráfico (dentro dos limites de controle)

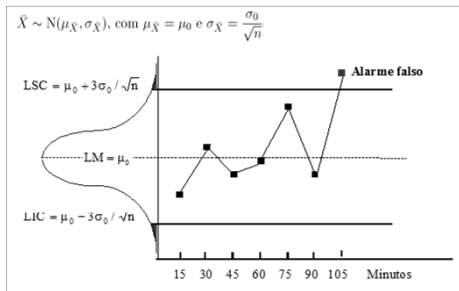
Erros de Decisão

- Alarme Falso (Erro tipo I)
 - ✓ considerar erroneamente o processo fora de controle
 - ✓ Consequência: intervir na hora errada
- Não detecção (Erro tipo II)
 - ✓ considerar erroneamente o processo em controle
 - ✓ Consequência: não intervir na hora certa

Medidas de Desempenho

- Supondo-se que as causas especiais não alterem σ
 - ✓ $\alpha = P\{\text{Erro tipo I}\}$
 $\alpha = P(\{\bar{X} > LSC_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0)$
 - ✓ $\beta = P\{\text{Erro tipo II}\}$
 $\beta = P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0\}$
 - ✓ Poder do Gráfico de Controle: $P_d = 1 - \beta$

• Gráfico de \bar{X} – Ocorrência de Alarme Falso



Alarme Falso

- Para muitas distribuições, \bar{X} tenderá para uma Normal mesmo para n pequeno
- Processo em controle com desempenho 3σ

$$\alpha = P\left\{\frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} + P\left\{Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\}$$

$$= P\{|Z| > 3\}$$

$$= 0,0027$$

Número Médio de Amostras

L : Quantidade de amostras antes de alarme falso

✓ $L \sim$ geométrica (α)

$$P\{L = x\} = \alpha(1 - \alpha)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

✓ Número médio de amostras antes de alarme falso

CMS₀: Comprimento médio da sequência com o processo sob controle

$$CMS_0 = E(L) = \frac{1}{\alpha}$$

✓ Para limites 3σ , CMS₀ = 370,4

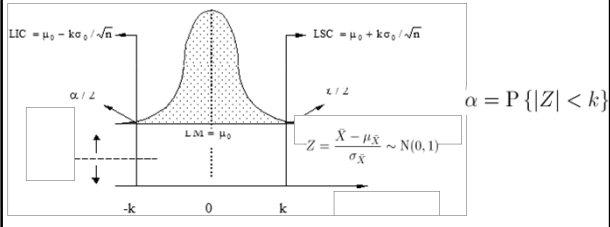
Influência da Abertura do Gráfico

- Semi-amplitude da região de controle:

$$k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

√ Diminuição da frequência de alarmes falsos

- adotar $k > 3$



- Exemplo: Para $k = 3,10$

√ Risco de alarme falso:

$$\alpha = P\{|Z| < k\} = P\{|Z| < 3,10\} = 0,0019$$

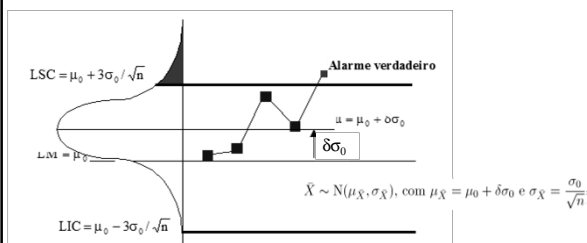
√ Número médio até alarme falso (tempo discreto) :

$$CMS_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0019} = 516,7$$

√ TMA: tempo médio entre alarmes (tempo contínuo)

$$TMA = 516,7 \times h$$

Gráfico de \bar{X} – Alarme Verdadeiro



√ Processo sob influência de causa especial (H_1 Verdadeira)

o ideal seria o 1º ponto cair na zona de ação do gráfico

Deslocamento da Média

- Sejam

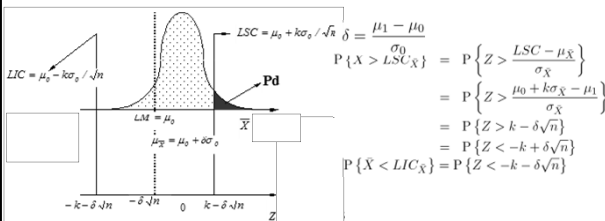
$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$$

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}$$

- Se $\delta \geq 1,5$ o valor de \bar{X} cairá na zona de ação rapidamente
- Se $\delta < 1,5$ haverá uma certa inércia para a média amostral cair na zona de ação

Poder do Gráfico de \bar{X}

P_d : P{um valor de \bar{X} cair na zona de ação}



$$P_d = P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

- No caso em que $k = 3$, $\delta = 1$ e $n = 4$

$$P_d = P\{Z < -3 + 1\sqrt{4}\} + P\{Z < -3 - 1\sqrt{4}\}$$

$$= P\{Z < -3 + 2\} + P\{Z < -3 - 2\}$$

$$= 0,1587 + 0,0000 = 0,1587$$

Alarme Verdadeiro

M : Qte. de amostras antes de um alarme verdadeiro

√ $M \sim$ geométrica (P_d)

$$P\{M = x\} = P_d(1 - P_d)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

√ Número médio de amostras para detectar desajuste

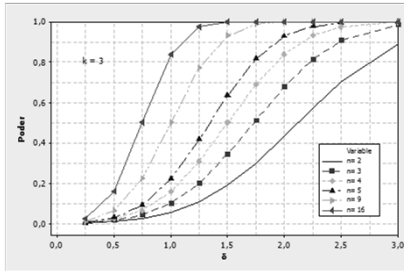
- CMS_1 : comprimento médio de sequência com o processo fora de controle

$$CMS_1 = E(M) = \frac{1}{P_d}$$

- Necessárias, em média, 6,3 amostras de tamanho 4 para detectar deslocamento de 1 desvio-padrão da média

- Necessárias em média 2 amostras de tamanho 9 para perceber o mesmo deslocamento ($P_d = 0,5$)

• Curvas de poder vs. deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão	
Amostra	Poder
2	0,06
4	0,159
9	0,50

√ n não afeta a probabilidade de alarme falso

√ Tamanho amostral tem grande influência no poder do gráfico de controle (erro tipo II)

Rapidez de Sinalização

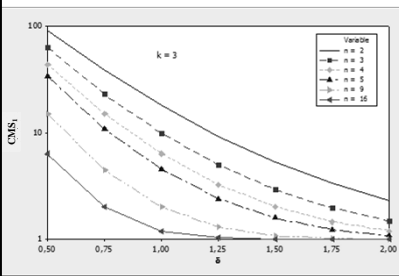
NMA: número médio de amostras até o sinal

$$CMS_i = \frac{1}{p_i}$$

√ Se $H_0: \mu = \mu_0$ for verdadeira, $p_0 = \alpha$ e $CMS_0 = 1/\alpha$

√ Se $H_0: \mu = \mu_0$ for falsa, $p_1 = P_d$ e $CMS_1 = 1/P_d$

• Curvas de CMS_1 vs. deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão

Tamanho	Qte.
3	10
9	2

√ Deslocamento na média de 1 desvio-padrão

- Em média, para detecção: 10 amostras de tamanho 3 ou 2 amostras de tamanho 9

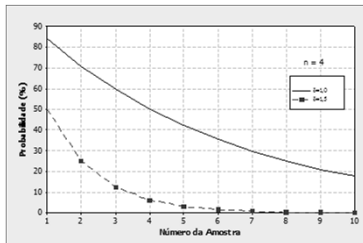
• M: número da amostra que sinaliza o desajuste

√ Para $\delta = 1,00, n = 4 \rightarrow P\{M=1\} = 0,159$ (Poder)

m	$P\{M=m\}$	$P\{M \leq m\}$
1	0,16	0,16
2	$0,84 \times 0,16$	0,29
3	$0,84^2 \times 0,16$	0,41
4	$0,84^3 \times 0,16$	0,50
5	$0,84^4 \times 0,16$	0,58
6	$0,84^5 \times 0,16$	0,65
7	$0,84^6 \times 0,16$	0,70

• Curva de Probabilidade de Não-deteção:

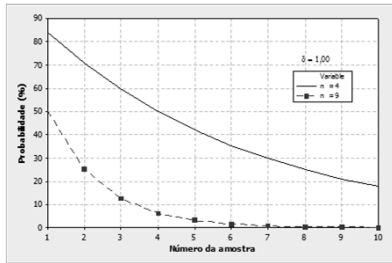
√ Probabilidade de, após desajuste, todos os i primeiros valores de X não caírem na zona de ação do gráfico



√ Velocidade de detecção de desajuste para amostra $n=4$

- Para $\delta=1,5$ detecção com 'certeza' até a 7ª. inspeção
- Para $\delta=1,0$ 30% de chance de não ser percebido até 7ª. amostra

- Curva de Probabilidade de Não Detecção para $\sqrt{\delta} = 1,0$



• Comentários:

- ✓ Deslocamento da média da ordem de $1,5 \sigma$ será detectado com 'certeza' até a 7ª. amostra.
- ✓ Deslocamento de $\delta = 1,0$ tem cerca de 30% de probabilidade de não ser percebido até a 7ª. amostra.
- ✓ Os gráficos de \bar{X} são ágeis na detecção de grandes deslocamentos da média ($\delta > 1,5$) e lentos no caso de deslocamentos moderados.
- ✓ Com grandes amostras, os gráficos de \bar{X} são ágeis na detecção de deslocamentos moderados e lentos no caso de amostras pequenas.

Desempenho do Gráfico de R

Gráfico de R

- Limites de controle:

$$LSC_R = d_2\hat{\sigma}_0 + 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0$$

$$LIC_R = d_2\hat{\sigma}_0 - 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0$$

- Estimativa do desvio-padrão do processo:

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Gráfico de R

- Hipóteses associadas:

$$\sqrt{H_0: \sigma = \sigma_0 \text{ vs. } \sigma \neq \sigma_0}$$

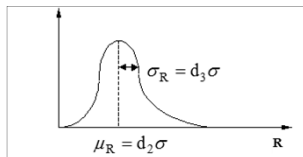
(σ_0 : desvio-padrão do processo sob controle)

- Medidas associadas

$$\alpha = 1 - P(LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0)$$

$$\beta = P(LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma \neq \sigma_0)$$

Cálculo de Probabilidades de R



- ✓ A distribuição de R é assimétrica
- ✓ A distribuição de R depende de n e σ
- ✓ A amplitude relativa $W = R/\sigma$ não depende de σ
- ✓ Valores para $P\{W \leq w_0 | n = n_0\}$ (Tabela B)
 - Hipótese de que X tenha distribuição normal
 - Uso da tabela: $P\{R < r_0\} = P\left\{W < \frac{r_0}{\sigma}\right\}$

Gráfico de R – Alarme Falso

- Processo sob controle e desempenho 3σ

$$1 - \alpha = P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0, n = n_0\}$$

$$= P\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\}\sigma_0 \leq R \leq (d_2 + 3d_3)\sigma_0 | n = n_0\}$$

$$= P\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\} \leq W \leq (d_2 + 3d_3) | n = n_0\}$$

√ $\alpha > 0,0027$ (para limites 3σ)

√ Para $2 \leq n \leq 6$, $LIC_R = 0$ ($d_2 < 3d_3$)

- Número médio de amostras até alarme falso

$$CMS_0 = \frac{1}{\alpha}$$

- Risco α para $n_0 = 2, 3, 4$ e 5

n	d_2	d_3	LIC_R	LSC_R	α	CMS_0
2	1,128	0,853	0	3,69	0,0090	111
3	1,693	0,888	0	4,36	0,0060	167
4	2,059	0,880	0	4,70	0,0050	200
5	2,326	0,864	0	4,92	0,0047	213
6	2,534	0,848	0	5,08	0,0045	222
7	2,704	0,833	0,21	5,20	0,0044	227
10	2,847	0,820	0,69	5,47	0,0041	244

$$LIC_R = \max\{0, d_2 - 3d_3\}$$

$$LSC_R = d_2 + 3d_3$$

$$CMS_0 = \frac{1}{\alpha}$$

Gráfico de R – Poder

$$P_d = P\{R > LSC_R | n = n_0, \sigma = \sigma_1\}$$

√ Supondo $\sigma_1 = 2\sigma_0$

$$P_d = P\left\{\frac{R}{\sigma_1} > \frac{(d_2 + 3d_3)\sigma_0}{\sigma_1} \mid n = n_0\right\}$$

$$= P\left\{W > \frac{d_2 + 3d_3}{2} \mid n = n_0\right\}$$

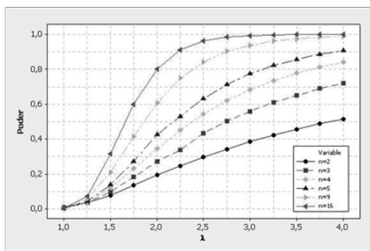
√ Para $n = 5$

$$P_d = P\left\{W > \frac{2,326 + (3)(0,864)}{2} \mid n = 5\right\}$$

$$= P\{W > 2,46 | n = 5\} = 1 - 0,5904 \approx 0,41$$

- Para $\sigma_1 = \lambda \sigma_0$
 λ : fator de aumento

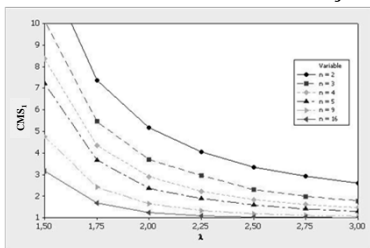
$$P_d = P\left\{W > \frac{d_2 + 3d_3}{\lambda} | n = n_0\right\}$$



Poder para detectar aumento de 100% ($\lambda = 2$) em σ

n	P_d
2	0,20
5	0,41
16	0,80

- Número médio de amostras até detecção: $CMS_1 = \frac{1}{P_d}$



CMS_1 para detectar aumento de 100% ($\lambda = 2$) em σ

n	CMS_1
2	5
4	3

- Limites de controle para α pré-definido:

$$\frac{LIC_R}{\hat{\sigma}_0} = w_{\alpha/2}$$

$$\frac{LSC_R}{\hat{\sigma}_0} = w_{1-\alpha/2}$$

✓ $w_{\alpha/2}$: valor de w , tal que $P\{W < w_{\alpha/2}\} = \alpha/2$

✓ LM = $d_2 \sigma_0$ (não é afetado)

✓ Vantagem: detectar melhorias do processo

- Para $n = 4$ e $\alpha = 0,002$: $LSC_R = w_{0,999}\hat{\sigma}_0 = 5,30 \hat{\sigma}_0$

$$LIC_R = w_{0,001}\hat{\sigma}_0 = 0,20 \hat{\sigma}_0$$

- Para $n = 4$ e desempenho 3σ : $LSC_R = 4,70 \hat{\sigma}_0$

$$\alpha = 0,005$$

**Gráficos de Controle \bar{X} e R:
Análise do Desempenho Conjunto**

Gráfico de \bar{X} e R

- Hipóteses associadas:
 $\checkmark H_0: \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0$
 $\checkmark H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ e } \sigma \neq \sigma_0$
- Risco de alarme falso do gráfico de \bar{X}

$$\alpha_{\bar{X}} = 1 - P \{ LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0 \}$$
- Risco de alarme falso do gráfico de R

$$\alpha_R = 1 - P \{ LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0 \}$$
- Probabilidade conjunta de alarme falso

$$\alpha = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_{\bar{X}} \alpha_R$$

- Considerando limites 3σ e $n = 4$:

$$\alpha_{\bar{X}} = 0,0027 \text{ e } \alpha_R = 0,0050$$
 \checkmark O risco de alarme conjunto é $\alpha \approx 0,0077$
 \checkmark Número médio de amostras até alarme falso:
 $CMS_0 \approx 130$ (considerado elevado)

Redução do Risco α

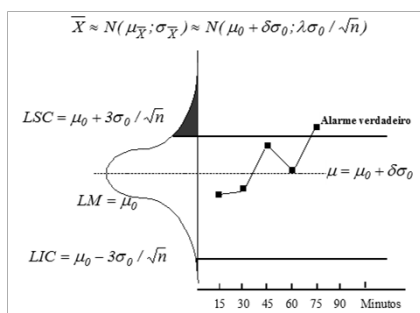
- Para melhorar a proteção contra alarmes falsos
 - √ Alargamento dos limites do gráfico
 - √ Razoável adotar $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R$
(caso não haja informações sobre os desajustes)

Exemplo:

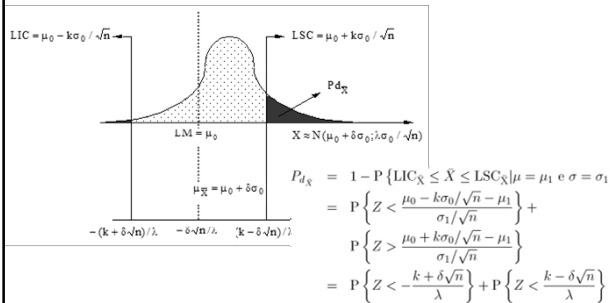
- √ Com $\alpha \approx 0,0024$ e $n = 4$ ($CMS_0 = 416,7$)
 $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$,
- √ Limites dos gráficos:
 - Gráfico de \bar{X}
 $\mu_0 \pm 3,24\sigma_0/\sqrt{4}$, pois $P\{|Z| > 3,24\} = 0,0012$
 - Gráfico de R
 $LSC_R = w_{0,9988}\sigma_0 = 5,25\sigma_0$

Desajuste e instabilidade no processo

$(\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 \text{ e } \sigma_1 = \lambda\sigma_0)$



- Poder do Gráfico de \bar{X} :
 ✓ para sinalizar desajuste e instabilidade no processo
 $(\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 \text{ e } \sigma_1 = \lambda\sigma_0)$



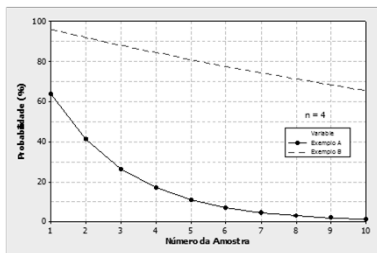
- Poder do gráfico de R
 ✓ para sinalizar instabilidade do processo
 $(\sigma_1 = \lambda\sigma_0)$

$$\begin{aligned}
 P_{dR} &= 1 - P\{R > LSC_R | \sigma = \sigma_1\} \\
 &= P\left\{W > \frac{w(1-\alpha_R)\sigma_0}{\sigma_1}\right\} \\
 &= P\left\{W > \frac{w(1-\alpha_R)}{\lambda}\right\}
 \end{aligned}$$

- Poder conjunto dos gráficos \bar{X} e R

$$P_d = P_{d_{\bar{X}}} + P_{dR} - P_{d_{\bar{X}}} P_{dR}$$

- Probabilidade de os gráficos de \bar{X} e R não terem emitido sinal até a i -ésima amostra após o desajuste
 ✓ As primeiras i observações caíram dentro dos limites



Comentários

- Exemplo A:
 - √ É quase certo que pelo menos um dos gráficos perceberá as alterações até a 7ª. Amostra
- Exemplo B:
 - √ Há uma probabilidade superior a 60% que até a 10ª. Amostra nenhum dos gráficos perceberá as alterações

Comparação de Poderes

- Planejamento:
 - √ $n = 4$ e $\alpha_X = \alpha_R = 0,0012$ ($k=3,24$ e $LSC_R = 5,25\sigma_0$)

	A	B (estável)	C (ajustado)	D
	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 1$	$\delta = 0$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 1,2$
Pd_X	0,1484	0,01255	0,1052	0,0309
Pd_R	0,2500	α_R	0,2500	0,0107
Pd	0,3613	0,01374	0,3289	0,0413

- √ B: o gráfico R não é sensível a alterações na média
- √ C: O poder global é reduzido sem o gráfico \bar{X}
- √ D: diminuição do poder global (em comparação a A)

Comentário

- Os gráficos de \bar{X} e R não são indicados para monitoramento de processos sujeitos a pequenas perturbações.
 - √ Deve-se recorrer a outros tipos de gráficos
 - CUSUM, EWMA, etc.

Alternativas para Monitoramento da Dispersão

Monitoramento da Variabilidade

- O gráfico de R tem sido mais utilizado por sua simplicidade
 - √ Para amostras grandes, o gráfico de S^2 ou de S são mais eficientes
 - √ Para amostras pequenas, o gráfico de R é tão eficiente quanto eles
 - √ A diferença começa a ser sensível para amostras maiores que 10 unidades

Gráfico do Desvio-Padrão S

- Pontos Amostrais:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

- √ Distribuição amostral não é tabelada. Pela tabela χ^2 :

$$P\{S > x\} = P\{S^2 > x^2\}, \text{ com } \frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

- √ Parâmetros da Estatística:

$$\begin{aligned} \mu_S &= c_1 \sigma \\ \sigma_S^2 &= (1 - c_1^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

- Limites 3σ do Gráfico de S:

$$LSC_S = c_4\hat{\sigma}_0 + 3\hat{\sigma}_0\sqrt{1-c_4^2}$$

$$LM_S = c_4\hat{\sigma}_0$$

$$LIC_S = c_4\hat{\sigma}_0 - 3\hat{\sigma}_0\sqrt{1-c_4^2}$$

$\sqrt{\hat{\sigma}_0}$: valor estimado do desvio-padrão do processo isento de causas especiais

Gráfico do Desvio-Padrão S

- Limites de Controle do Gráfico de S:

$$LSC_S = c_4\hat{\sigma}_0 + 3\hat{\sigma}_0\sqrt{1-c_4^2} = B_6\hat{\sigma}_0$$

$$LM_S = c_4\hat{\sigma}_0$$

$$LIC_S = c_4\hat{\sigma}_0 - 3\hat{\sigma}_0\sqrt{1-c_4^2} = B_5\hat{\sigma}_0$$

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1-c_4^2}$$

$$B_6 = c_4 + 3\sqrt{1-c_4^2}$$

- Se S_C é o estimador de σ

$$S_C = \frac{\sum_{i=1}^m S_i}{m} = \bar{S}$$

$$LSC_{\bar{S}} = \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = B_4\bar{S}$$

$$LM_{\bar{S}} = \bar{S}$$

$$LIC_{\bar{S}} = \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = B_3\bar{S}$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

$$B_6 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

Fonte: D. Montgomery. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*

- Se S_C é usado para estimar s, os limites para os gráficos de X podem ser definidos como:

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{S} \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{S}$$

Gráfico de S

- Limites de controle para risco a pré-determinado

$$\begin{aligned} P\{S > LSC_S\} &= \gamma \\ P\left\{\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2 > \frac{n-1}{\sigma_0^2} LSC_S^2\right\} &= \gamma \\ \frac{n-1}{\sigma_0^2} LSC_S^2 &= \chi_{n-1; \gamma}^2 \\ LSC_S &= \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \gamma}^2}{n-1}} \end{aligned}$$

√ $\gamma = \alpha/2$ (limites bilaterais) ou $\gamma = \alpha$ (unilateral)

- Limites de controle – bilateral

$$\begin{aligned} LSC_S &= \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \alpha/2}^2}{n-1}} \\ LM_S &= \hat{\sigma}_0 \\ LIC_S &= \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; (1-\alpha/2)}^2}{n-1}} \end{aligned}$$

- Limites de controle – unilateral

$$\begin{aligned} LSC_S &= \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \alpha}^2}{n-1}} \\ LM_S &= \hat{\sigma}_0 \\ LIC_S &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo – 4.4/7

- Fabricação de refrigerante:

√ Característica de qualidade de interesse:

- quantidade de CO₂ na bebida
- valor-alvo: $\sigma_0 = 0,3$ g CO₂/l

√ Fase 1:

- $m = 15$ e $n = 5$
- Construção de gráfico de S unilateral ($\alpha = 0,01$ e $\alpha = 0,05$)

√ Fonte: Tabela 4.4/1, pág. 397, Mittag

Amostra Variável

- Gráficos de $\bar{X} - S$ com tamanho de amostra variável:

√ Estimação dos parâmetros do processo:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m n_i} \quad \bar{S} = \left[\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m} \right]^{1/2}$$

√ Limites de controle são variáveis (calculados da maneira usual)

Exemplo 5.4 – Montgomery

- Diâmetros internos (mm) de anéis de pistão de motores de automóveis:
 - √ Subgrupos coletados para fase 1, $m = 25$
 - √ Amostras variáveis:
 - $n = 3$ a 5
 - √ Média global:
 - √ Desvio médio ponderado:

- Medida dos diâmetros internos (mm):

i	X _{i1}	X _{i2}	X _{i3}	X _{i4}	X _{i5}	X _{bar}	S _i	n	n X _{bar}	(n-1) S _i ²
1	74,030	74,002	74,019	73,992	74,008	74,010	0,0148	5	370,05	0,000873
2	73,985	73,992	74,001			73,986	0,0046	3	221,98	0,000042
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002	74,008	0,0147	5	370,04	0,000870
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009	74,003	0,0091	5	370,01	0,000330
5	73,992	74,007	74,015	73,982	74,014	74,003	0,0122	5	370,01	0,000597
6	74,009	73,994	73,997	73,985		73,996	0,0099	4	295,98	0,000295
7	73,995	74,006	73,994	74,000		73,999	0,0055	4	295,99	0,000091
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988	73,987	0,0123	5	369,98	0,000601
9	74,008	73,995	74,009	74,005		74,004	0,0064	4	296,01	0,000123
10	73,988	74,000	73,990	74,007	73,995	73,998	0,0063	5	369,99	0,000158
11	73,994	73,998	73,994	73,995	73,990	73,994	0,0029	5	369,97	0,000033
12	74,004	74,000	74,007	74,000	73,996	74,001	0,0042	5	370,00	0,000071
13	73,983	74,002	73,988			73,994	0,0100	3	221,98	0,000201
14	74,006	73,967	73,994	74,000	73,984	73,990	0,0153	5	369,95	0,000937
15	74,012	74,034	73,998			74,008	0,0087	3	222,02	0,000152
16	74,000	73,984	74,005	73,996	73,996	73,997	0,0076	5	369,98	0,000243
17	73,994	74,012	73,986	74,005		73,999	0,0115	4	295,99	0,000399
18	74,006	74,010	74,018	74,003	74,000	74,007	0,0070	5	370,03	0,000195
19	73,984	74,002	74,003	74,005	73,997	73,998	0,0085	5	369,99	0,000287
20	74,000	74,010	74,013			74,008	0,0068	3	222,02	0,000093
21	73,982	74,001	74,015	74,005	73,986	74,000	0,0122	5	369,99	0,000591
22	74,004	73,999	73,990	74,006	74,009	74,002	0,0074	5	370,00	0,000221
23	74,010	73,999	73,990	74,009	74,014	74,002	0,0119	5	370,01	0,000569
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010	74,005	0,0087	5	370,02	0,000303
25	73,992	73,984	73,995	74,017	74,013	73,998	0,0162	5	369,99	0,001047
						Total		113	8362,02	0,009326

- Média global:
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i x_i}{\sum_{i=1}^m n_i} = \frac{8.362,085}{113} = 74,001$$

- Desvio padrão médio ponderado:

$$\bar{s} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{25} (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^{25} n_i - 25} \right]^{1/2} = \left[\frac{0,009320}{88} \right]^{1/2} = 0,01030$$

- Limites de controle para a amostra 1 ($n_1 = 5$):
 √ Gráfico de S:

$$LSC_s = \bar{s} \left(1 + 3 \sqrt{\frac{1}{c_4^2} - 1} \right) = 0,01030 \left(1 + 3 \sqrt{\frac{1}{0,940^2} - 1} \right) = 0,02152$$

$$LM_s = \bar{s} = 0,01030$$

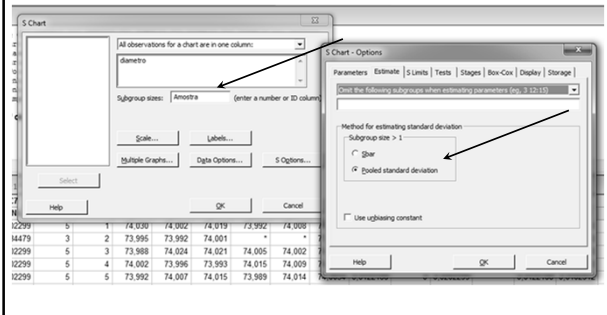
$$LIC_s = 0$$

- Cálculo dos Limites de Controle:

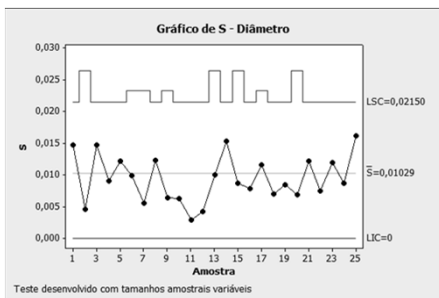
i	n	X bar _i	S _i	LSC _i
1	5	74,010	0,0148	0,0215
2	3	73,996	0,0046	0,0264
3	5	74,008	0,0147	0,0215
4	5	74,003	0,0091	0,0215
5	5	74,003	0,0122	0,0215
6	4	73,996	0,0099	0,0233
7	4	73,999	0,0055	0,0233
8	5	73,997	0,0123	0,0215
9	4	74,004	0,0064	0,0233
10	5	73,998	0,0063	0,0215
11	5	73,994	0,0029	0,0215
12	5	74,001	0,0042	0,0215
13	3	73,994	0,0100	0,0264
14	5	73,990	0,0153	0,0215
15	3	74,008	0,0087	0,0264
16	5	73,997	0,0078	0,0215
17	4	73,999	0,0115	0,0233
18	5	74,007	0,0070	0,0215
19	5	73,998	0,0085	0,0215
20	3	74,008	0,0068	0,0264
21	5	74,000	0,0122	0,0215
22	5	74,002	0,0074	0,0215
23	5	74,002	0,0119	0,0215
24	5	74,005	0,0087	0,0215
25	5	73,998	0,0162	0,0215

- Gráfico de S – amostra variável

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > S →



- Gráfico de S – Minitab



√ Processo aparenta estar estável

Gráfico da Variância Amostral S²

- Supondo amostra aleatória de população normal:

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

- Limites de controle para risco de alarme falso α :

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi_{n-1; \alpha/2}^2$$

$$LM_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2$$

$$LIC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi_{n-1; (1-\alpha/2)}^2$$

√ $\hat{\sigma}_0^2$: estimativa variância de processo sob controle

Fase 1

- √ Coleta de m subgrupos de tamanho n, com o processo sob controle estatístico
- √ Estimativa da variância do processo isento de causas especiais:

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m S_i^2}{m}$$

- √ Linha média: \bar{S}^2
- √ Procedimento análogo ao adotado para o gráfico de R
 - Plotagem dos pontos
 - Exame de eventuais pontos fora dos limites de controle

Exemplo

- Plano amostral:
 - √ n = 5 e risco de alarme falso $\alpha = 0,005$
- Limites de controle do gráfico:

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{5-1} 16,424 = 4,11 \hat{\sigma}_0^2$$

$$LIC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{4} 0,145 = 0,04 \hat{\sigma}_0^2$$

Comparação com o Gráfico de R

- Plano amostral: n = 5 e risco $\alpha = 0,47\%$
 - √ Gráfico de R com limites 3σ :
 $LSC_R = 1,92 \sigma_0$ e $LIC_R = 0$
 - √ Gráfico de S^2 (limite inferior descartado):

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{5-1} \chi_{(5-1);0,0047}^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{4} 15,00 = 3,75 \hat{\sigma}_0^2$$

- Limite superior de controle foi reduzido

Parâmetros de S²

- S²: variância amostral de amostra aleatória de população amostral $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$

√ Média: $\mu_{S^2} = \sigma^2$

√ Variância: $Var\left[\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right) S^2\right] = 2(n-1)$
 $\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^2 Var(S^2) = 2(n-1) \quad \sigma_{S^2} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \sigma^2$
 $Var(S^2) = \frac{2}{n-1} (\sigma^2)^2$

Limites 3σ

- São dados por:

$$LSC_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2 + 3 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \hat{\sigma}_0^2$$

$$LM_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2$$

$$LIC_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2 - 3 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \hat{\sigma}_0^2$$

√ $\hat{\sigma}_0^2$: estimativa variância de processo sob controle

Poder do Gráfico de S²

- Para processo com $\sigma_1^2 = (\lambda \sigma_0)^2$

$$P_d = P\{S^2 > LSC_{S^2} | \sigma^2 = \sigma_1^2\}$$

$$= P\left\{\frac{n-1}{\sigma_1^2} S^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2}\right) LSC_{S^2}\right\}$$

$$= P\left\{\chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\lambda^2 \sigma_0^2}\right) LSC_{S^2}\right\}$$

√ Para gráficos com limites 3σ ou com risco pré-determinado

√ Poder de gráficos com limites 3σ :

$$Pd = P\left\{\chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2}\right) \hat{\sigma}_0^2 \left[1 + 3\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]\right\}$$

$$= P\left\{\chi_{n-1}^2 > \frac{n-1}{\lambda^2} \left[1 + 3\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]\right\}$$

√ Poder de gráficos S^2 com risco α pré-determinado:

$$Pd = P\left\{\chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2}\right) \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1}\right) \chi_{n-1,\gamma}^2\right\}$$

$$= P\left\{\chi_{n-1}^2 > \frac{\chi_{n-1,\gamma}^2}{\lambda^2}\right\}$$

- Com $\gamma = \alpha/2$ para limites bilaterais e $\gamma = \alpha$ para $LIC_{S^2}=0$

Comparação com o Gráfico de R

- Para $n = 5$ e risco $\alpha = 0,47\%$:

$$\sqrt{LSC_{S^2}} = 3,75 \hat{\sigma}_0^2$$

- Poder para detectar desajuste com $\sigma_1 = 2\sigma_0$:

$$Pd = P\left\{\chi_{5-1}^2 > \left(\frac{5-1}{2^2}\right) 3,75\right\}$$

$$= P\{\chi_4^2 > 3,75\}$$

$$= 0,441$$

√ Gráfico de R com as mesmas características (n e α) oferece um poder de 41%

Gráficos de \bar{X} – Regras Suplementares

Regras Suplementares

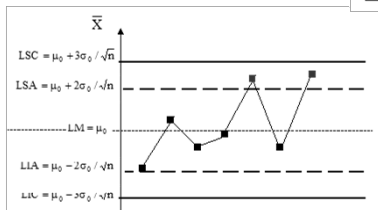
- Em geral, definidas apenas para o gráfico de \bar{X}
 - √ Regras surgidas com o propósito de acelerar a percepção de alteração no processo;
 - √ Tentam formalizar a percepção do operador da possibilidade de perturbação no processo;

Notação das Regras

- (L, m, a, b) : sinal ocorre quando ao menos L , dentre os m últimos pontos, estiverem entre $\mu_0 + a \sigma_{\bar{X}}$ e $\mu_0 + b \sigma_{\bar{X}}$
- Regra Básica de Controle;
 - √ $C_1 : (1; 1; k; \infty)$ ou $(1; 1; -\infty; -k)$
 - 1 ponto fora dos limites de controle ($k = 3$: limites 3);

Gráfico de \bar{X} – Regras Suplementares de Decisão

- $C_2 : (2;2;2; \infty)$ ou $(2;2;-\infty;-2)$
- $C_3 : (2;3;2; \infty)$ ou $(2;3;-\infty;-2)$
- $C_4 : (3;4;1,6; \infty)$ ou $(3;4;-\infty;-1,6)$
- $C_5 : (8;8;0; \infty)$ ou $(8;8;-\infty;0)$
- $C_6 : (10;10;0; \infty)$ ou $(10;10;-\infty;0)$



- Algumas Regras Suplementares:
 - √ C_2 : (2; 2; 2; ∞) ou (2; 2; $-\infty$; -2)
 - √ C_3 : (2; 3; 2; ∞) ou (2; 3; $-\infty$; -2)
 - √ C_4 : (3; 4; 1, 6; ∞) ou (3; 4; $-\infty$; -1, 6)
 - √ C_5 : (8; 8; 0; ∞) ou (8; 8; $-\infty$; 0)
 - √ C_6 : (10; 10; 0; ∞) ou (10; 10; $-\infty$; 0)

Alarmes Falsos

- Regras agilizam a detecção de mudanças, mas s diminuem a proteção contra alarmes falsos
 - √ risco α aumenta
- Exemplo:
 - √ Alarme sempre que 6 pontos consecutivos caírem em qualquer dos lados da linha média:
 $0,5^6=0,0313$ (12 vezes o valor de $\alpha = 0,0027$;
- Devem-se alargar os limites de controle para se manter o nível de proteção contra alarmes falsos

- Frequência de alarmes falsos no gráfico de \bar{X} com regras suplementares

Regras Utilizadas	Probabilidade de Alarme Falso	Frequência Esperada de Alarmes Falsos
C_1	0,0027	1 a cada 370,4 inspeções
C_1 e C_2	0,0036	1 a cada 278,0 inspeções
C_1 e C_3	0,0044	1 a cada 225,5 inspeções
C_1 e C_4	0,0035	1 a cada 286,2 inspeções
C_1 e C_5	0,0065	1 a cada 152,8 inspeções
C_1 e C_6	0,0037	1 a cada 273,8 inspeções

- Valores de k que garantem $\alpha = 0,0027$

Regras Utilizadas	Novo Valor para k
C_1	3,0000
C_1 e C_2	3,1274
C_1 e C_3	3,3492
C_1 e C_4	3,1072
C_1 e C_5	-----
C_1 e C_6	3,1316

Detecção de Mudanças

- Para combinação C_1 e C_3 , com

$$\sqrt{n} = 4; \delta = 0,60; w = 2 \text{ e } k = 3,3492$$

√ Probabilidade abaixo do nível de alerta:

$$\begin{aligned} a_1 &= P\{X < \mu_0 + w\sigma/\sqrt{n} | \mu = \mu_0 + \delta\sigma\} \\ &= P\{Z < w - \delta\sqrt{n}\} = P\{Z < 0,8\} \\ &= 0,78814 \end{aligned}$$

√ Probabilidade entre nível de alerta e controle

$$\begin{aligned} a_2 &= P\{\mu_0 + w\sigma/\sqrt{n} < X < \mu_0 + k\sigma/\sqrt{n} | \mu = \mu_0 + \delta\sigma\} \\ &= P\{w - \delta\sqrt{n} < Z < k - \delta\sqrt{n}\} = P\{0,8 < Z < 2,15\} \\ &= 0,1961 \end{aligned}$$

√ M: qte. de amostras até sinal $E_{+\delta}(M) = \frac{1+a_2+a_1a_2}{1-a_1-a_1^2a_2} \approx 15$

- Similarmente para $\delta = -0,60$

√ Probabilidades a_1 e a_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= P\{Z < w - \delta\sqrt{n}\} = P\{Z < 3,8\} \\ &= 0,999931 \\ a_2 &= P\{w - \delta\sqrt{n} < Z < k - \delta\sqrt{n}\} = P\{3,8 < Z < 4,55\} \\ &= 0,00069 \end{aligned}$$

√ M: Quantidade de amostras até o sinal

$$E_{-\delta}(M) = \frac{1+a_2+a_1a_2}{1-a_1-a_1^2a_2} \approx 1449$$

√ CMS1: Quantidade média de amostras até o sinal

$$CMS_1 = \left[\frac{1}{E_{+\delta}(M)} + \frac{1}{E_{-\delta}(M)} \right]^{-1} \approx 15$$

• Combinação de Regras – CMS₁ (n = 4)

δ	C ₁	C ₁ e C ₂	C ₁ e C ₃	C ₁ e C ₄	C ₁ e C ₆
0,00	370,0	370,0	370,0	370,0	370,0
0,20	199,0	166,0	147,0	148,0	120,0
0,40	71,6	49,7	41,3	40,1	33,8
0,60	27,8	17,9	15,0	14,3	15,2
0,80	12,4	8,0	7,0	6,8	9,1
1,00	6,3	4,4	4,1	4,1	6,1
1,20	3,7	2,8	2,8	2,8	4,0
1,40	2,4	2,0	2,1	2,2	2,7
1,60	1,7	1,6	1,7	1,7	1,9
1,80	1,4	1,4	1,5	1,4	1,5
2,00	1,2	1,2	1,3	1,2	1,2

• Comentários:

- √ C₁ e C₆: ágil na detecção de pequenas perturbações na média;
- √ C₁ e C₂: praticamente sempre mais ágil que o gráfico de controle 3σ tradicional (C₁ isolada).
- √ Para manutenção do o nível de proteção contra alarmes falsos, deve-se alargar os limites de controle.

Planejamento dos Gráficos de Controle

Planejamento de Gráfico de Controle

- Parâmetros de planejamento:
 - √ k: abertura dos limites de controle
 - √ n: tamanho da amostra
 - √ h: intervalo entre as amostras

Abordagens de planejamento

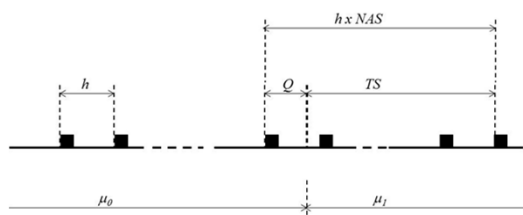
- √ Planejamento estatístico:
 - minimização do número de alarmes falsos
 - maximização da capacidade de detectar mudanças
- √ Planejamento econômico:
 - Minimização do custo esperado do sistema de controle
 - Custos:
 - amostragem
 - envio não conformes ao mercado
 - custos de ajuste
 - etc.

Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras

Intervalo de Tempo entre Amostras (h)

- É função de:
 - √ tempo de produção de cada item;
 - √ custo da inspeção;
 - √ tempo de inspeção;
 - √ estabilidade do processo;
 - √ custo de operar sob causa especial.

Tempo até o Sinal



■ Pontos de inspeção

- √ TS : Tempo até o sinal
- √ NAS : número de amostras até o sinal
- √ Q : tempo entre o desajuste a última inspeção (anterior)
- √ h : intervalo entre amostragens (fixo)

Determinação dos Parâmetros Ótimos

- √ TA : tempo entre alteração e alarme (TA)
(medida de eficiência)
- √ NAS : número de amostras até o sinal
- √ Q : tempo entre a última amostragem e perturbação

$$TA = h \text{ NAS} - Q$$

√ TMA₁: tempo esperado até alarme verdadeiro

$$TMA_1 = E(TA) = E(hNAS - Q)$$

- Depende de δ , n , h e k

√ Suposição:

- perturbação ocorre ao acaso em intervalo entre amostras

$$E(Q) = h/2$$

$$TMA_1 = h CMS - \frac{h}{2} = h \left(\frac{1}{P_d} - \frac{1}{2} \right)$$

Exemplo

√ Parâmetros do gráfico de \bar{X} :

$k = 3$ ($\alpha = 0,0027$) e $\delta = 1,5$

n	h (h)	P _d	CMS	TMA		n/h (am./h)
				(h)	(min)	
2	0,50	0,19	5,26	2,38	143	4
	0,25	0,19	5,26	1,19	72	8
4	0,50	0,50	2,00	0,75	45	8

√ P_d: Poder (valores na Tabela 3.7)

√ n/h: taxa horária de amostragem

$$TMA_1 = (0,5)(5,26) - \frac{0,5}{2} = 2,38 \text{ horas}$$

• Comentários:

√ É conveniente usar o TMA₁ como medida de rapidez

- Fixados previamente CMS₀ e a taxa de amostragem (n/h);

√ Há uma infinidade de combinações de (n, h, k) com mesmo mesmo tempo médio até alarme falso (TMA₀)

- TMA₀ = h/α

√ Uma das combinações minimiza o tempo esperado até o sinal (TMA₁).

Exemplo

- Sejam $n/h = 8$, $TMA_0 = 500$ e $\delta = 1,5$
- Qual a melhor combinação de (n, h) dentre: $(2; 0,25)$, $(4; 0,50)$, $(8; 1,00)$ e $(16; 2,00)$?

1. Para cada h , determina-se k :

$$\alpha = 2 \Phi(-k) \quad k = -\Phi^{-1}\left(\frac{h}{2 TMA_0}\right)$$

2. Determinação do poder:

$$P_d = P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

3. Cálculo tempo médio até alarme:

$$TMA_1 = h \left(\frac{1}{P_d} - \frac{1}{2} \right)$$

4. Busca-se uma combinação de (n, h, k) que minimize o tempo esperado até o sinal (TMA_1)
- Fixam-se o tempo médio até alarme falso ($TMA_0 = h/\alpha$) e a taxa de amostragem (n/h),

Determinação de parâmetros ótimos Gráfico \bar{X} :

Determinação dos Parâmetros do Gráfico de Controle X-Barra	
Entrada	Saída
$n = 2$	$k = 3,481$
$h = 0,25$ horas	Poder = 0,087
$TMA_0 = 500$ minutos	$n/h = 8,000$
$DELTA = 1,5$	$CMS_1 = 11,494$
	$TMA_1 = 2,748$ horas
	$TMA_1 = 2,000$ horas e 44,905 minutos

$$k = \Phi^{-1}\left(\frac{0,25}{2 \times 500}\right) = 3,481$$

$$P_d = P\{Z < -3,481 + 1,5\sqrt{2}\} + P\{Z < -3,481 - 1,5\sqrt{2}\} = 0,087$$

$$n/h = \frac{2}{0,25} = 8 \text{ amostras por hora}$$

$$CMS_1 = \frac{1}{0,087} = 11,494 \text{ amostras até sinal}$$

$$TMA_1 = \frac{0,25}{0,087} - \frac{0,25}{2} = 2,748 \text{ horas}$$

- Tempo esperado até o sinal

√ Para $n/h = 8$ amostras/hora e $TMA_0 = 500$

δ	$n=2; h=0,25$		$n=4; h=0,50$		$n=8; h=1,00$		$n=16; h=2,00$	
	$k=3,48$		$k=3,29$		$k=3,09$		$k=2,88$	
	h	min.	h	min.	h	min.	h	min.
0,50	89	38	45	11	20	50	9	32
0,75	32	6	13	23	5	31	2	39
1,00	12	46	4	50	2	1	1	18
1,25	5	39	2	5	0	59	1	2
1,50	2	45	1	3	0	39	1	0
2,00	0	51	0	24	0	30	1	0

Comentários

- Entrada: $n/h = 8$ amostras/hora e $TMA_0 = 500$

√ Para detectar pequenos deslocamentos ($\delta \leq 1$)
trabalhar com amostras grandes ($n = 16$) e intervalos de amostragem longos ($h = 2$ horas);

√ Para deslocamentos moderados ($1 < \delta \leq 1,5$)
trabalhar com $n = 8$ e intervalos $h = 1$ hora;

√ Para grandes deslocamentos ($\delta > 1,5$)
Trabalhar com $n = 4$ e intervalos $h = 30$ min

Planejamento Estatístico – Resumo

- Para definição do tamanho da amostra (n) e frequência de amostragem (h)

√ Magnitude da mudança no processo a ser detectada

√ Rapidez desejada para detectar essa mudança

- Situação ideal (inviável):

√ grandes amostras tomadas mais frequentemente
 n grande e h pequeno

- Prática adequada:

√ pequenas amostras em intervalos de tempo menores
- mais usada em indústrias

√ grandes amostras em intervalos de tempo maiores

Intervalo de Tempo entre Amostras

- É função de:
 - √ tempo de produção de cada item;
 - √ custo da inspeção;
 - √ tempo de inspeção;
 - √ estabilidade do processo;
 - √ custo de operar sob causa especial.

- Problemas:
 - √ obtenção de valores precisos para estes parâmetros;
 - √ estabilidade do processo está associada ao tempo médio isento de causas especiais;
 - √ operação sob causa especial implica aumento da PFE, dependendo da intensidade da perturbação.
 - √ Valores pequenos de h implicam custos elevados com amostragem e maior incidência de alarmes falsos.

Conclusão

Tipos de Cartas de Controle

Classificação	Critério de diferenciação
Unilateral/multilateral	Número de limites de controle
Shewhart clássica/modificada	Procedimento de cálculo dos limites de controle
Controle único/duplo	Número de estatísticas amostrais para uma característica de qualidade
Univariada/multivariada	Quantidade de características de qualidade monitorada por uma carta
Variáveis/atributo	Tipo de distribuição da estatística amostral
Sem memória/com memória	Consideração dos resultados amostrais anteriores

Cartas de Controle de Shewhart – Variável

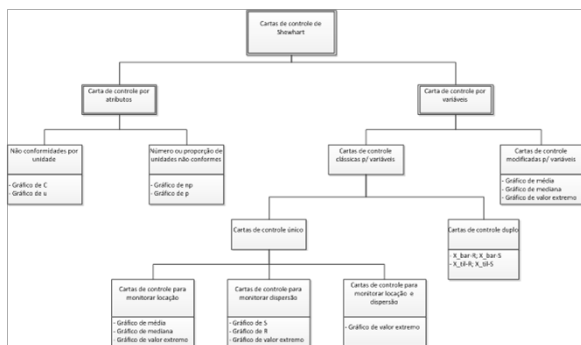
- Gráfico de \bar{X} (ou de \tilde{X}):
 - √ Estatística de teste: média amostral (ou mediana amostral)
 - √ Monitoramento do nível do processo
- Gráfico de R (ou de S):
 - √ Estatística de teste: amplitude amostral (ou desvio padrão amostral)
 - √ Monitoramento da dispersão do processo

- Gráfico de valor extremo:
 - √ Todas os elementos do vetor amostral (observações individuais) são plotados no gráfico
 - √ Monitoramento tanto da locação quanto da dispersão
 - √ Desempenho questionável quando comparado com as cartas especializadas
 - Únicos elementos de importância do vetor amostral são o máximo e o mínimo

Cartas de Controle de Shewhart – Atributo

- Gráfico de C (ou np):
 √ Estatística de teste: quantidade de não conformidades por unidade amostral (ou unidades amostrais não conformes)
- Gráfico de p:
 √ Estatística de teste: proporção de unidades não conformes
- Gráfico de u:
 √ Estatística de teste: não conformidades por unidade amostral

• Cartas de Controle de Shewhart



Referências

Bibliografia Recomendada

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapman & Hall, 1993.
